Vollständige Induktion

Liebe Schülerinnen und Schüler,

heute möchte ich euch von einer mathematischen Beweismethode erzählen, die euch helfen kann, komplexe Probleme zu lösen und mathematische Zusammenhänge zu verstehen. Die Rede ist von der **vollständigen Induktion**.

Stellt euch vor, ihr habt eine Reihe von Dominosteinen vor euch, die in einer bestimmten Anordnung aufgestellt sind. Wenn ihr den ersten Stein umstoßt, werden alle anderen Steine in der Reihe ebenfalls umfallen. Ähnlich funktioniert die vollständige Induktion in der Mathematik.

Diese Methode ermöglicht es uns, mathematische Aussagen (**Annahme** = **Induktionsvoraussetzung**) für alle natürlichen Zahlen zu beweisen.

Wir beginnen mit dem ersten Schritt (**Induktionsverankerung**), also der Basis, und zeigen, dass die Aussage für eine gewählte Zahl n gilt.

Anschließend nehmen wir an, dass die Aussage für eine beliebige Zahl n gilt und beweisen, dass sie dann auch für die nächste Zahl $n+1$ gilt (**Induktionsschluss von $\boldsymbol{n}$ auf $\boldsymbol{n+1}$**). Wenn wir diese beiden Schritte erfolgreich durchgeführt haben, können wir daraus schließen, dass die Aussage für alle natürlichen Zahlen gilt.

Die vollständige Induktion ist eine äußerst nützliche Methode, um mathematische Zusammenhänge zu erkennen und zu beweisen. Sie ermöglicht es uns, Muster und Regelmäßigkeiten in **Zahlenreihen** zu entdecken und mathematische Probleme systematisch zu lösen.

Ich lade euch ein, euch gemeinsam mit mir auf eine spannende Reise durch die Welt der vollständigen Induktion zu begeben. Lasst uns anhand der folgenden Beispiele herausfinden, wie wir diese Methode anwenden können, um mathematische Rätsel zu knacken und komplexe Probleme zu lösen.

Seid ihr bereit, euer mathematisches Denken auf ein neues Level zu heben? Dann lasst uns in die Welt der vollständigen Induktion eintauchen und herausfinden, welche mathematischen Geheimnisse sie für uns bereithält.

Beispiel 1:

Induktionsvoraussetzung:

Das ist die Annahme, die es zu beweisen gilt, auch als Induktionsvoraussetzung bezeichnet.

$$1+2+3+\cdots+(n-1)+n=\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

Induktionsverankerung:

Hier wählt man ein n, zweckmäßigerweise möglichst klein (aber zulässig), um die Rechnung einfach zu gestalten. Für dieses n prüft man nach, ob die Annahme erfüllt ist, oder nicht (wahr / falsch).

$$n=2$$

$$1+2=\frac{2\cdot(2+1)}{2}=3 \qquad \text{(wahr)}$$

Induktionsschluss von n auf $n+1$:

Hier wird anstelle n die Zahl $n+1$ eingesetzt, durch anschließendes Abspalten des $(n+1)$.-ten Summanden kann dann die Induktionsvoraussetzung zur weiteren Beweisführung verwendet werden.

$$\sum_{k=1}^{n+1} k=\sum_{k=1}^{n} k+(n+1)=\frac{n\cdot(n+1)}{2}+(n+1)$$

$$=\frac{n\cdot(n+1)+2\cdot(n+1)}{2}=\frac{n^2+n+2\cdot n+2}{2}=\frac{n^2+3\cdot n+2}{2}=\frac{(n+1)\cdot((n+1)+1)}{2} \qquad \text{q.e.d}$$

Der Beweis der Richtigkeit der Annahme ist erbracht, wenn im Zielausdruck $(n+1)$ anstelle n wie in der Induktionsvoraussetzung steht, die Annahme gilt dann auch für jeden Nachfolger.

Beispiel 2:

Induktionsvoraussetzung:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2 \cdot n - 3) + (2 \cdot n - 1) = \sum_{k=1}^{n} (2 \cdot k - 1) = n^2$$

Induktionsverankerung:

$$n = 2$$

$$(2 \cdot 1 - 1) + (2 \cdot 2 - 1) = 4 \qquad \text{(wahr)}$$

Induktionsschluss von n auf $n + 1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2 \cdot k - 1) = \sum_{k=1}^{n} (2 \cdot k - 1) + (2 \cdot (n + 1) - 1) = n^2 + (2 \cdot (n + 1) - 1)$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2 \cdot k - 1) = n^2 + 2 \cdot n + 1 = (n + 1)^2 \qquad \text{q.e.d.}$$

Beispiel 3:

Induktionsvoraussetzung:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n - 1)^2 + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2 \cdot n + 1)}{6}$$

Induktionsverankerung:

$$n = 3$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 = \frac{3 \cdot (3+1) \cdot (2 \cdot 3 + 1)}{6} = \frac{12 \cdot 7}{6} = 14 \qquad \text{(wahr)}$$

Induktionsschluss von n auf $n + 1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n + 1)^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2 \cdot n + 1)}{6} + (n + 1)^2 = \frac{n \cdot (2 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1) + 6 \cdot n^2 + 12 \cdot n + 6}{6}$$

$$= \frac{2 \cdot n^3 + 9 \cdot n^2 + 13 \cdot n + 6}{6} = \frac{(n^2 + 3 \cdot n + 2) \cdot (2 \cdot n + 3)}{6} = \frac{(n+1) \cdot ((n+1) + 1) \cdot (2 \cdot (n+1) + 1)}{6} \qquad \text{q.e.d.}$$

Beispiel 4:

Induktionsvoraussetzung:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2 \cdot n - 1)^2 = \sum_{k=1}^{n} (2 \cdot k - 1)^2 = \frac{n \cdot (4 \cdot n^2 - 1)}{3}$$

Induktionsverankerung:

$$n = 2$$

$$1^2 + 3^2 = \frac{2 \cdot (4 \cdot 2^2 - 1)}{3} = 10 \qquad \text{(wahr)}$$

Induktionsschluss von n auf $n + 1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k - 1)^2 = \sum_{k=1}^{n} (2k - 1)^2 + (2(n + 1) - 1)^2$$

$$= \frac{n \cdot (4 \cdot n^2 - 1)}{3} + (2(n + 1) - 1)^2 = \frac{n \cdot (4 \cdot n^2 - 1)}{3} + \frac{12 \cdot n^2 + 12 \cdot n + 3}{3}$$

$$= \frac{4 \cdot n^3 - n + 12 \cdot n^2 + 12 \cdot n + 3}{3} = \frac{4 \cdot n^3 + 12 \cdot n^2 + 11 \cdot n + 3}{3} = \frac{4 \cdot n^3 + 8 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 4 \cdot n^2 + 8 \cdot n + 3}{3}$$

$$= \frac{(n+1) \cdot (4 \cdot n^2 + 8 \cdot n + 3)}{3} = \frac{(n+1) \cdot (4 \cdot (n^2 + 2 \cdot n + 1) - 1)}{3} = \frac{(n+1) \cdot (4 \cdot (n+1)^2 - 1)}{3} \qquad \text{q.e.d.}$$

Beispiel 5:

Induktionsvoraussetzung:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{2^k}\right) = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

Induktionsverankerung:

$$n = 2$$

$$\frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} = 1 = 2 - \frac{2+2}{2^2} = 2 - 1 = 1 \qquad \text{(wahr)}$$

Induktionsschluss von n auf $n + 1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1}\left(\frac{k}{2^k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{2^k}\right) + \frac{(n+1)}{2^{(n+1)}} = 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{(n+1)}{2^{(n+1)}}$$

$$= 2 + \frac{n+1-2\cdot(n+2)}{2^{(n+1)}} = 2 + \frac{n+1-2\cdot n-4}{2^{(n+1)}} = 2 - \frac{n+3}{2^{(n+1)}} = 2 - \frac{(n+1)+2}{2^{(n+1)}} \qquad \text{q.e.d.}$$

Hinweis: es kann manchmal schwierig sein, den Induktionsschluss zu beweisen und zum gewünschten Zielausdruck zu gelangen. Dann kann es hilfreich sein, vom Zielausdruck ausgehend rückwärts zu rechnen.

Angewendet auf **Beispiel 4** könnte das wie folgt aussehen:

Rechnung vorwärts (mit hinzugefügtem letztem Summanden):

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)^2 = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 + (2(n+1)-1)^2$$

$$= \frac{n\cdot(4\cdot n^2-1)}{3} + (2(n+1)-1)^2 = \frac{n\cdot(4\cdot n^2-1)}{3} + \frac{12\cdot n^2+12\cdot n+3}{3}$$

$$= \frac{4\cdot n^3+12\cdot n^2+11\cdot n+3}{3} \qquad \text{bis hier, ausmultipliziert, geordnet}$$

Rechnung rückwärts (ausgehend vom Zielausdruck):

$$\frac{(n+1)\cdot(4\cdot(n+1)^2-1)}{3} = \frac{(n+1)\cdot(4\cdot(n^2+2\cdot n+1)-1)}{3} = \frac{(n+1)\cdot(4\cdot n^2+8\cdot n+3)}{3}$$

$$= \frac{4\cdot n^3+8\cdot n^2+3\cdot n+4\cdot n^2+8\cdot n+3}{3} = \frac{4\cdot n^3+12\cdot n^2+11\cdot n+3}{3} \qquad \text{bis hier, ausmultipliziert, geordnet}$$

Sobald man auf Übereinstimmung stößt (blaue Terme), kann die Kette der Umformungen in „Vorwärtsrichtung“ verfolgt werden, die Beweiskette ist dann vollständig, dann ist die Annahme (*Induktionsvoraussetzung*) wahr.

Lassen sich keine übereinstimmenden Terme auf diese Weise herstellen, dann ist die Annahme (*Induktionsvoraussetzung*) falsch.

Tipp: übt die vollständige Induktion einige Male durch, das hilft euch, sicherer und flüssiger zu rechnen, in Prüfungen, Klassenarbeiten etc. wird sich das als sehr vorteilhaft erweisen.